

22/3/21

Φυλλάδιο 3

Ενυγραμμισμένο ... έχει λυθεί πιο πριν.

1^η) $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ και $\lambda_3 = 12$
Επειδή $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\chi_A(x) = (x-6) \cdot (x-12) \Rightarrow A$ διαγωνοποιείται

$\chi_A(x) = x^2 - 18x + 72 \Rightarrow A^2 - 18A + 72I = 0_{3 \times 3} \Rightarrow A - 18I + 72A^{-1} = 0_{3 \times 3}$

$\Rightarrow A^{-1} = \dots$

2^η) Αν δοθεί $f(x) = (-1)^n (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)$ υπάρχει $A \in M(n, \mathbb{R})$

ώστε $\chi_A(x) = f(x) = ?$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ελαφρώς σπασμένη

$n=1 : f(x) = -(x+a_0)$

$A = (-a_0) \Rightarrow \chi_A(\lambda) = -a_0 - \lambda = -(a_0 + \lambda)$

Ισχύει

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}$$

$A1 - \lambda I_n \xrightarrow{(-1) \times (n-1)}$

από αντιστροφή εναλλαγής

$+ (-1)^{n-1} (-a_0) \quad \textcircled{+}$

$$A1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\chi_A(\lambda) = (-1)^{n-1} (\lambda^{n-2} + a_{n-1}\lambda^{n-3} + \dots + a_2\lambda + a_1) + (-1)^n a_0$

Όταν ο A είναι νίσιμος $n \times n$ το χαρακτηριστικό θα είναι βαθμού n

$\textcircled{+} = -\lambda (-1)^{n-1} (\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + a_1) + (-1)^n a_0 =$

$= (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda + a_0)$

3-4) $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}), A^2 + I = O_{2 \times 2} \quad \chi_A(\lambda) = ?$

$A^2 + I = O_{2 \times 2} \Rightarrow \deg(\chi_A(\lambda)) = 2$ + Cayley-Hamilton $\Rightarrow$

$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ Δεν έχει πραγματικές $\Rightarrow$ Δεν διαγωνοποιείται στο $\mathbb{R}$

$\chi_A(\lambda) \mid \chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = \chi_A(\lambda)$

$\hookrightarrow$ αυτό δεν διαγείται

4-4) $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \quad A^2 = I \quad \textcircled{+} \quad \chi_A(\lambda) = ?$

• $A = A^{-1} \quad \hookrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$

• $\chi_A(\lambda) \neq \lambda^2 - 1$ επειδή ο A είναι νίσιμος 3×3

• $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$? $\textcircled{x} \Rightarrow A^3 - I = 0$ και θα αγόρευε:

$\chi_A(\lambda) \mid \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$

$\begin{cases} \hookrightarrow \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1 \Rightarrow ? \text{ \& Δεν ζέρω} \\ \hookrightarrow \chi_A(\lambda) = \lambda - 1 \Rightarrow A = I_3 \\ \hookrightarrow \chi_A(\lambda) = \lambda + 1 \Rightarrow A = -I_3 \end{cases}$

Να δειχθεί $A \neq \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

π.χ. αν $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ τότε $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ και
 $0 \neq A$ δεν είναι ούτε 0
 I_3 ούτε $0 - I_3$

5-η) $A \in U(n \times n, \mathbb{R})$ $k \geq n$: $A^k = 0_{n \times n} \Rightarrow A^n = 0_{n \times n}$

$\chi_A(\lambda) = \pm (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) \Rightarrow A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0_{n \times n}$
 $\Rightarrow A^k + a_{n-1}A^{k-1} + \dots + a_1A^{k-n+1} + a_0A^{k-n} = 0_{n \times n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{A^{k-1}}_{\neq 0} (A^{n-1} + \dots + \underbrace{a_{n-1}}_{\neq 0} A^{n-n+1} + \underbrace{a_0}_{\neq 0} A^{n-n}) = 0_{n \times n}$

$A^{k-1} + \underbrace{a_{n-2}}_{\neq 0} A^{k-2} + \dots + \underbrace{a_1}_{\neq 0} A^{k-n+1} + \underbrace{a_0}_{\neq 0} A^{k-n} = 0_{n \times n} \Rightarrow$ πολυμ $\mu \in A$

$\Rightarrow A^k + \underbrace{a_{n-2}}_{\neq 0} A^{k-1} + \dots + \underbrace{a_0}_{\neq 0} A^{k-n+1} = 0_{n \times n} = A$

$\Rightarrow \underbrace{a_{n-2}}_{\neq 0} (A^{k-1} + \underbrace{a_{n-3}}_{\neq 0} A^{k-2} + \dots + \underbrace{a_0}_{\neq 0} A^{k-n+1}) = 0_{n \times n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{a_0}_{\neq 0} A^{k-n} = 0_{n \times n} \Rightarrow A^{2n-k} A^{k-n} = A^n = 0$

6-η) $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $k = ?$ $\deg \chi_A(x) \leq 2$

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^3$

• Αν $\deg \chi_A(x) = 1 \Rightarrow \chi_A(x) \mid (\lambda - 1)^3 \Rightarrow \chi_A(x) = \lambda - 1$. Τότε θα

είχαμε $A - I = 0_{n \times n} \Rightarrow A = I \quad \forall k \in \mathbb{R}$ αλλά αυτό δεν ισχύει

Άρα $\chi_A(x) = 2 \Rightarrow \chi_A(x) \mid (\lambda - 1)^3 \Rightarrow \chi_A(x) = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow (A - I)^2 = 0_{3 \times 3}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & k & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k = 0$

0 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Δεν διαγωνοποιείται διότι:
 $\chi_A(x) = (x-1)^2$: Δεν είναι
 ηγρωτοβάθμιο

$\lambda = 4$) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$ άρα διαγωνοποιείται

$V(-1) = \langle (-1, 1) \rangle$ και $V(5) = \langle (1, 2) \rangle$

$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $\Rightarrow A = P \Lambda P^{-1}$

$e^A = P \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} P^{-1} = \dots$

Ευκλείδειο διανόμενο

$\forall x$ και ανεξάρτητα $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ώστε να ισχύουν οι 4 ιδιότητες: Τότε ο V καλείται Ευκλείδειος χώρος

Π.χ. 1) κανονικό Ευκλείδειο στον $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$

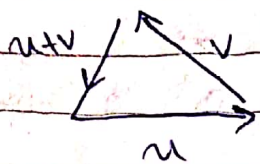
2) Υπάρχουν και άλλα

Cauchy-Schwarz: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \Rightarrow \cos \phi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$,
 $-1 \leq \cos \phi \leq 1$ ϕ είναι γωνία μεταξύ u και v

$u \perp v$ (κάθετο) $\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos \phi = 0$

Εφαρμογή: Τριγωνική ιδιότητα: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2$
 $= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 =$
 $= (\|u\| + \|v\|)^2$



$$a \leq b + \delta$$

$$b \leq a + \delta$$

$$\delta \leq a + b$$

Π.χ. $|\mathbb{R}_n[x]| \delta. x$ Να δείξετε ότι η απεικόνιση $\langle -, - \rangle$
 $= |\mathbb{R}_n[x]| \times |\mathbb{R}_n[x]| \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$

αποτελεί εσωτερικό γινόμενο

Πύα: Πρέπει να εξετάσουμε τις 4 ιδιότητες:

$$1) \int_0^1 (f + f') g dx = \int_0^1 f g + f' g dx = \int_0^1 f \cdot g dx + \int_0^1 f' \cdot g dx = 1$$

$$\Rightarrow \langle f + f', g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f', g \rangle$$

$$2) \int_0^1 (a f) g dx = a \int_0^1 f g dx \Rightarrow \langle a f, g \rangle = a \langle f, g \rangle \forall a \in \mathbb{R}$$

$$3) \int_0^1 f \cdot g dx = \int_0^1 g \cdot f dx \Rightarrow \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$$

$$4) \int_0^1 f \cdot f dx = \int_0^1 f^2 dx \Rightarrow \int_0^1 f^2 dx \geq 0 \Rightarrow \langle f, f \rangle \geq 0$$

$$\int_0^1 f^2 dx = 0 \Rightarrow f = 0$$

εμβαδόν

0 $|\mathbb{R}_n[x]|$ Ευκλείδειος χώρος

Π.χ. $U(n \times n, \mathbb{R})$ δ.χ. Δίνεται η αντιστοιχία $\langle _, _ \rangle$:
 $U(n \times n, \mathbb{R}) \times U(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : \langle A, B \rangle = \text{tr } A \cdot B^t$ να δείξετε
 ότι αποτελεί εσωτερικό γινόμενο

Λύση:

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \quad B^t = (b'_{ij}) = b'_{ij} = b_{ji}$$

$$A \cdot B^t = C = (c_{ij}) \Rightarrow c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b'_{tj} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{jt}$$

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^t) = \text{tr } C = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n a_{it} b_{it} \quad (+)$$

Διορίζεται: 1) $\langle A + A', B \rangle = \text{tr}((A + A')B^t) = \text{tr}(AB^t + A'B^t) =$
 $= \text{tr } A \cdot B^t + \text{tr } A' \cdot B^t = \langle A, B \rangle + \langle A', B \rangle$

2) $\langle aA, B \rangle = \text{tr}(aAB^t) \stackrel{(+)}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n a a_{it} b_{it} =$
 $= a \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n a_{it} b_{it} = a \langle A, B \rangle$

3) $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t) = (\text{tr}(AB^t))^t = \text{tr}(A \cdot B^t)^t =$
 $= \text{tr}(B^t)^t A^t = \text{tr } B \cdot A^t = \langle B, A \rangle$

4) $\langle A, A \rangle \stackrel{(+)}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n a_{it} a_{it} = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n a_{it}^2 \geq 0$ και

0 όταν $A = 0_{n \times n}$

Δ είναι μια καλή ιδέα για να δείξετε
 τι είναι το εσωτερικό γινόμενο.
 Τραβήξτε για συνέψιν

Π.χ. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ με $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$

να βρεθούν τα μήκη και η γωνία μεταξύ των: $f(x) = 7x^2$
και $g(x) = 3x^2 + 2$

Λύση:

$$\bullet \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (*) \quad \langle f, f \rangle = \int_0^1 (7x^2)^2 dx = \int_0^1 49x^4 dx =$$

$$= 49 \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{49}{5}$$

$$(*) \Rightarrow \|f\| = \sqrt{\frac{49}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

$$\bullet \|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \int_0^1 (3x^2 + 2)^2 dx = \int_0^1 (9x^4 + 12x^2 + 4) dx =$$

$$= \frac{9x^5}{5} + \frac{12x^3}{3} + 4x \Big|_0^1 = \frac{9}{5} + 4 + 4 = \frac{49}{5}$$

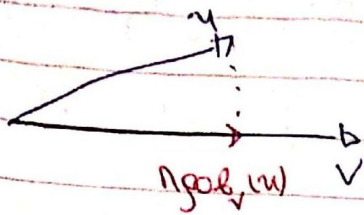
$$\|g\| = \frac{7\sqrt{5}}{5} = \|f\|$$

$$\bullet \cos \phi = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \cdot \|g\|} \quad (*), \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 7x^2 (3x^2 + 2) dx =$$

$$= \int_0^1 (21x^4 + 14x^2) dx = \frac{21x^5}{5} + \frac{14x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{21}{5} + \frac{14}{3} = \frac{63+70}{15}$$

$$(*) \Rightarrow \cos \phi = \frac{\frac{133}{15}}{\left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{133 \cdot 5}{15 \cdot 49} = \frac{133}{147} \Rightarrow \phi \text{ τόσο } \cos = \frac{133}{147}$$

Προβολές



$\text{προβ}_v(u)$ = είναι η προβολή του u στο v

$$\text{προβ}_v(u) = t \cdot \frac{v}{\|v\|} = \frac{\|u\| \cdot \langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v$$

μήκος του $\frac{v}{\|v\|}$ διανύσματος = αριθμός

• Αν $v \neq \vec{0} \Rightarrow$ Το διάνυσμα $\frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$ έχει μήκος 1 = $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$ και καλείται μοναδιαίο διάνυσμα

$\longrightarrow$ Θέλεις ένα άλλο με μήκος $t > 0$ $t \cdot w$ είναι w με $\|w\|=1$
διάνυσμα πάνω στο w με μήκος $\|t \cdot w\| = t \cdot \|w\| = t \cdot 1 = t$

Θέλουμε το $t = \text{μήκος}$. Από το ορθ. τρίγωνο $AB = A \Gamma \text{ συν } \varphi$

Τύπος προβολής του u στο v : $\text{προβ}_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v$

π.χ. Στο προηγούμενο παράδειγμα να βρεθεί η προβολή του f στο g

$$\text{προβ}_{(3x^2+2)}(7x^2) = \frac{\langle 7x^2, 3x^2+2 \rangle}{\langle 3x^2+2, 3x^2+2 \rangle} (3x^2+2) = \frac{133}{49} (3x^2+2) = \frac{133}{147} (3x^2+2)$$

- Ορισμός: 1) Ένα υποσύνολο $\{u_1, \dots, u_k\}$ σ'έναν Ευκλείδειο χώρο καλείται κανονικό, αν $\|u_i\| = \dots = \|u_k\|$
- 2) Ένα υποσύνολο $\{u_1, \dots, u_k\}$ σ'έναν Ευκλείδειο χώρο καλείται ορθογώνιο αν $u_i \perp u_j$ για $i \neq j$
- 3) Ένα υποσύνολο $\{u_1, \dots, u_k\}$ σ'έναν Ευκλείδειο χώρο καλείται ορθοκανονικό, αν είναι κανονικό και ορθογώνιο ταυτόχρονα

Π.χ. Έστω $\mathbb{R}^4$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο το υποσύνολο $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ είναι ένα ορθοκανονικό υποσύνολο και μάλιστα ορθοκανονική βάση

24/3/21

Π.χ. $A \in U(3 \times 3, \mathbb{R}) : A^3 - A = 0_{3 \times 3}$

Cayley - Hamilton $\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 :$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1 \Rightarrow A$ διαγωνοποιείται : $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} : A^k = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot P^{-1} =$$

$$= P \begin{pmatrix} 0^k & & \\ & (-1)^k & \\ & & 1^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Αν $k = 2n + 1 =$ περιττός $(-1)^k = -1$

$$A^{2n+1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

Αν $k = 2n =$ άρτιος $(-1)^k = 1$

$$A^{2n} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = A^2$$